数理解析研究所講究録
778巻 1992年 14-25

Andrianov's L-functions associated to Siegel wave forms of degree two

京大数理研　堀　正（あきら）（Akira Hori）

整数論において、いろいろなL関数を定義して解析接続し、関数等式を証明することは、Hecke以来の伝統的な問題である。Hecke [H] は1937年に$SL_2(\mathbb{Z})$に関する保型形式に対し、Euler積をもつDirichlet級数を付随させ、その解析接続と関数等式を証明した。これを一般化することは長い間うまく行かなかったが、ようやく1970年代に入り、Andrianov [A1]、[A2] が2次の正則なSiegel保型形式の場合に拡張することに成功した。そして、このAndrianovの結果は、荒川 [Ar]、Zhuravlev [Z]、菅野 [Su1]、[Su2]、[Su3] によってさらに拡張されている。荒川ではvector値のSiegel保型形式が、Zhuravlevでは Hilbert保型形式が扱われている。また、[Su1] では non-split な場合へ、[Su2] では符号 $(2, 8)$ の特殊直交群 $SO(2, 8)$ の場合へ、[Su3] では similitude 付きの unitary 群の場合へ拡張されている。

さて、上記の一般化ではすべて正則な保型形式を扱っているのに対して、以下に述べる我々の一般化では、正則でない保型形式を扱う。つまり、2次の Siegel wave form に対して Andrianov の結果を拡張するのである。

まず記号を定める。Gを2次の実 symplectic 群

$$G = Sp_2(\mathbb{R}) = \{ g \in SL_4(\mathbb{R}) \mid gJ{}^tg = J \}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}、\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とし、Gの離散部分群Γを

$$\Gamma = Sp_2(\mathbb{Z}) = G \cap SL_4(\mathbb{Z})$$

で定める。Gは2次の Siegel 上半空間

$$H_2 = \{ Z \in M_2(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z,\ \mathrm{Im}\, Z > 0 \}$$

に対して

$$g\langle Z \rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \qquad Z \in H_2、\ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G$$

で作用している。また、H_2上のG不変微分作用素のなす環の生成元の集合$\{\Delta_1、\Delta_2\}$として、Δ_1が2次、Δ_2が4次であるものをとる。Δ_1はH_2上の不変距離に関する Laplacian である。Δ_2の具体形は中島[N1]、[N2]によって与えられた。ここでは、中島によって与えられた形にΔ_2を固定する。つまり、Δ_1、Δ_2を次のようにおくのである。

$$\Delta_1 = \sum_{k,l=1}^{3} y_k y_l \partial_k \overline{\partial_l} - (y_1 y_3 - y_2^2)\left(\partial_1 \overline{\partial_3} + \overline{\partial_1} \partial_3 - \frac{1}{2} \partial_2 \overline{\partial_2}\right)$$

$$\Delta_2 = (y_1y_3 - y_2^2)^2(\partial_1\partial_3 - \frac{1}{4}\partial_2^2)(\overline{\partial_1}\,\overline{\partial_3} - \frac{1}{4}\overline{\partial_2}^2)$$
$$+ \frac{i}{4}(y_1y_3 - y_2^2)(y_1\partial_1 + y_2\partial_2 + y_3\partial_3)(\overline{\partial_1}\,\overline{\partial_3} - \frac{1}{4}\overline{\partial_2}^2)$$
$$- \frac{i}{4}(y_1y_3 - y_2^2)(y_1\overline{\partial_1} + y_2\overline{\partial_2} + y_3\overline{\partial_3})(\partial_1\partial_3 - \frac{1}{4}\partial_2^2)$$
$$+ \frac{1}{16}(y_1y_3 - y_2^2)(\partial_1\overline{\partial_3} + \overline{\partial_1}\partial_3 - \frac{1}{2}\partial_2\overline{\partial_2})$$

ただし、$Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in H_2$ と $1 \leqq k \leqq 3$ に対して

$$z_k = x_k + iy_k \qquad (x_k、y_k \in \mathbb{R})$$
$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right)$$
$$\overline{\partial_k} = \frac{\partial}{\partial \overline{z_k}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right)$$

と定めたのである。

このとき、2次の Siegel wave form (K-type が自明なもの)は次のように定義される。

<u>Def</u>　2次の Siegel wave form F とは、H_2 上の複素数値 C^∞ 関数で、次の3つの条件をみたすものである。

(i) F は Γ 不変である。つまり、

$$F(\gamma\langle Z\rangle) = F(Z) \qquad (\gamma \in \Gamma、\ Z \in H_2)$$

(ii) F は Δ_1、Δ_2 の同時固有関数である。つまり、

$$\begin{cases} \Delta_1 F = \sigma_1 F \\ \Delta_2 F = \sigma_2 F \end{cases} \qquad (\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{C})$$

(iii) F は次の増大度をもつ。

$$|F(Z)| \leqq C\left(\sup\{tr(\mathrm{Im}\,Z),\ tr(\mathrm{Im}\,Z)^{-1}\}\right)^n \qquad (C > 0,\ n \in \mathbb{N})$$

Δ_1、Δ_2に対する固有値がσ_1、σ_2である２次の*Siegel wave form*の全体は、$\mathbb{C}$上のvector空間をなす。その空間を$\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_{\sigma_1,\sigma_2}$とおく。$\mathfrak{F}$は有限次元であることが、Harish-Chandra [HC]により知られている。

さらに、*cusp form*の定義を思い出す。$\mathbb{Q}$上定義されたSp_2の各*parabolic*部分群に対して、その*unipotent radical*をNとおく。このとき、$F\in\mathfrak{F}$が*cusp form*であるとは

$$\int_{N(\mathbb{Z})\backslash N(\mathbb{R})} F(n\langle Z\rangle)\,dn=0 \qquad \forall P:\text{parabolic}$$

をみたすことである。ここで、

$$N(\mathbb{Z})=N(\mathbb{Q})\cap\Gamma$$

であり、dnはNのHaar測度である。*cusp form*は$\Gamma\backslash H_2$上の各cuspにそって急減少していることが知られている。$\mathfrak{F}$の元のうち、*cusp form*であるようなもの全体がなす$\mathbb{C}$上のvector空間を$\mathfrak{F}^0$とおく。$\mathfrak{F}^0$にはHermitian *inner product*

$$(F_1,F_2)=\int_{\Gamma\backslash H_2} F_1(Z)\overline{F_2(Z)}\frac{dZ}{(\det Y)^3} \qquad F_1,F_2\in\mathfrak{F}^0$$

$$\left(\begin{aligned}&Z=X+iY\ ,\quad X=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_2&x_3\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}y_1&y_2\\y_2&y_3\end{pmatrix}\\&dZ=dx_1dx_2dx_3dy_1dy_2dy_3\end{aligned}\right)$$

が定義される。あとで、Hecke作用素$T(m)$（$m\in\mathbb{N}$）を定義するが、それらは互いに可換であり、上の*inner product*に

関して self-adjoint になる。したがって、$\mathfrak{F}^0$ は Hecke 作用素の同時固有関数によって張られるのである。

さて、Siegel wave form F の定義 (i) で $\gamma=\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix}\in\Gamma$ ($B={}^tB$) とおくと

$$F(Z+B)=F(Z)$$

であるから、F は

$$F(Z)=\sum_{\substack{{}^tN=N\in M_2(\mathbb{Q}) \\ \text{semi-integral}}} a_F(N,Y)\,e^{2\pi i\,tr(NX)} \qquad a_F(N,Y)\in\mathbb{C}$$

と Fourier 展開される。この展開式を定義 (ii) の式に代入すると、Fourier 係数 $a_F(N,Y)$ のみたす微分方程式が得られる。丹羽 [Ni] では、この微分方程式に対して、いわゆる一般化された Whittaker model の一意性の問題が取り扱われ、次のような結果が得られている。

N が定値であるとき Fourier 係数は

$$a_F(N,Y)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{N,n}(F)W_{N,n}(Y) \qquad a_{N,n}(F)\in\mathbb{C}$$

と展開され、一般化された Whittaker 関数 $W_{N,n}(Y)$ は、N＝E のとき

$$Y=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

と変数変換すると

$$W_{E,n}(Y)=-4t_1t_2e^{2ni\theta}\int_1^\infty\int_1^\infty P_{\nu_1}^n(z_1)P_{\nu_2}^n(z_2)\times$$

$$\times J_n\left(2\pi i(z_1^2-1)^{\frac{1}{2}}(z_2^2-1)^{\frac{1}{2}}(t_1-t_2)\right)e^{-2\pi z_1 z_2(t_1+t_2)}dz_1 dz_2$$

と表示される。ただし、$P_\nu^n(z)$ は第1種のLegendre関数であり、$J_n(z)$ は第1種のBessel関数である。さらに、一般のNのときには

$$W_{N,n}(Y)=\begin{cases} W_{E,n}(N^{\frac{1}{2}}YN^{\frac{1}{2}}) & N>0 \\ W_{E,n}((-N)^{\frac{1}{2}}Y(-N)^{\frac{1}{2}}) & N<0 \end{cases}$$

により表示が得られる。ここで、ν_1、ν_2は関係式

$$\begin{cases} \sigma_1=\frac{1}{8}(\lambda_1+\lambda_2-2)、\quad \sigma_2=\frac{1}{256}(\lambda_1-\lambda_2)^2-\frac{1}{32}(\lambda_1+\lambda_2)+\frac{1}{64} \\ \nu_1=\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda_1}}{2}、\quad \nu_2=\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda_2}}{2} \end{cases}$$

により、σ_1、σ_2から決まる定数である。丹羽[Ni]では、仮定

$$\left.\begin{array}{l} -1<\mathrm{Re}(\nu_1)<0、\ -1<\mathrm{Re}(\nu_2)<0 \\ \lambda_1、\lambda_2\in\mathbb{R}-\mathbb{Z} \end{array}\right\}\cdots\cdots(\#)$$

の下で、上記の積分表示が得られているのである。ν_1、ν_2とσ_1、σ_2がこのような関係式で結びつけられる意味については、[Ni]の後半を参照して欲しい。

次に、Hecke作用素を定義する。各$m\in\mathbb{N}$に対して

$$S_m=\{M\in M_4(\mathbb{Z})\mid MJ{}^tM=mJ\}$$

とおく。そして、Hecke作用素$T(m)$を

$$(T(m)F)(z)=m^{-3}\sum_{\left(\begin{smallmatrix}A&B\\C&D\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma\backslash S_m}F((Az+B)(Cz+D)^{-1})\qquad F\in\mathfrak{F}$$

で定義する。ここに、$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$は$\Gamma\backslash S_m$の完全代表系を走る。すると、Siegel wave formの定義(i)により$T(m)$はwell-definedであり、$T(m)\in\mathfrak{H}$となる。そして、志村[Sh]によって調べられているabstract Hecke ringの性質から、m、$m'\in\mathbb{N}$に対して

$$\begin{cases} T(m)T(m')=T(m')T(m) \\ \text{if } (m,\ m')=1\text{、}\ T(m)T(m')=T(mm') \end{cases}$$

が成り立ち、さらに、素数pごとに

$$\sum_{\delta=0}^{\infty} T(p^{\delta})t^{\delta}=(1-p^{-4}t^2)\times$$
$$\times\left[1-T(p)t+\{T(p)^2-T(p^2)-p^{-4}\}t^2-T(p)p^{-3}t^3+p^{-6}t^4\right]^{-1}$$

も成り立つ。

以下、$F\in\mathfrak{H}$をHecke作用素の同時固有関数として

$$T(m)F=\lambda_F(m)F \qquad \lambda_F(m)\in\mathbb{C}\text{、}\ m\in\mathbb{N}$$

とおく。そして、Fに付随したAndrianovのL関数を

$$L_F(s)=\zeta(2s+4)\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{\lambda_F(m)}{m^s} \qquad s\in\mathbb{C}$$

で定義する。ここに、$\zeta(s)$はRiemann zeta関数である。このDirichlet級数$L_F(s)$は$\mathrm{Re}(s)$が十分に大きい所で絶対収束する。上で述べたHecke作用素の性質を使うと、$L_F(s)$は

$$L_F(s)=\prod_p Q_{p,F}(p^{-s})^{-1}$$

とEuler積に分解される。ただし、4次式$Q_{p,F}(t)$は

$$Q_{p,F}(t)=1-\lambda_F(p)t+\{\lambda_F(p)^2-\lambda_F(p^2)-p^{-4}\}t^2-\lambda_F(p)p^{-3}t^3+p^{-6}t^4$$

で与えられる。このとき、主結果は次の定理である。

Th　$F\in\mathfrak{F}^0$をHecke作用素の同時固有関数とする。さらに、Fは(#)および

$$a_{E,0}(F)+a_{-E,0}(F)\neq 0$$

をみたすとする。このとき、$L_F(s)$は$\mathbb{C}$上の整関数に解析接続され、関数等式

$$\Psi_F(-2-s)=\Psi_F(s)$$

をみたす。ただし、$\Psi_F(s)$は

$$\Psi_F(s)=\pi^{-2s}\Gamma\left(\frac{s+2+\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1-\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+2+\nu_2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1-\nu_2}{2}\right)L_F(s)$$

で与えられる。

Remark　定理の仮定をみたす$F\in\mathfrak{F}^0$を実際に構成することは、重要な問題であるが、まだできていない。

以下、定理の証明の概略を述べる。証明を実行するにあたっては、いわゆる補助のDirichlet級数をとる。この級数のとり方は、Andrianovの場合がそうであったように、虚2次体Kを1つ与えるごとに1つある。しかし、どの虚2次体でも全く同様にできるので、ここではGaussの数体$K=\mathbb{Q}(i)$をとっている。そして、定理の主張も、これに対応したものになっているのである。つまり、$K=\mathbb{Q}(i)$以外の場合には仮定

$$a_{E,0}(F)+a_{-E,0}(F)\neq 0$$

を対応するものと取り換えなければならない。ここでは、$K=\mathbb{Q}(i)$に対応するDirichlet 級数

$$\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{a_{mE,0}(F)+a_{m(-E),0}(F)}{m^s}\qquad \left(E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

を使っている。この級数を一方では

$$\{a_{E,0}(F)+a_{-E,0}(F)\}\zeta_K(s+2)^{-1}L_F(s)$$

なるEuler 積に変形して、問題のL関数$L_F(s)$と関係づけ、他方ではΓ因子を除いて

$$\int_{SL_2(\mathcal{O}_K)\backslash H^*}F(u)E_K(u;s+2)\,du$$

と積分表示している。ここに、$\zeta_K(s)$は$K=\mathbb{Q}(i)$のDedekind zeta関数である。また、$\mathcal{O}_K$は$K=\mathbb{Q}(i)$の整数環であり

$$H^*=SL_2(\mathbb{C})/SU(2)\hookrightarrow H_2$$

と見ている。そして、$E_K(u;s)$は、$K=\mathbb{Q}(i)$に付随して決まるH^*上のEisenstein 級数と呼ばれるものである。このように補助のDirichlet 級数を2通りに変形すると、問題のL関数$L_F(s)$の積分表示が得られ、結局Eisenstein 級数の解析接続と関数等式に帰着して、$L_F(s)$の解析接続と関数等式を得る。また、整関数になることの証明は、このEisenstein 級数の表示を少し変形することによって得られる。

丹羽[Ni]による一般化されたWhittaker関数の明示公式は、補助のDirichlet級数の積分表示を求めるときに使う。一般化されたWhittaker関数のMellin変換を計算することになるが、この計算だけはAndrianovの真似ではなく、一番苦労した部分である。

文献

[A1] Andrianov, A.N., Dirichlet series with Euler products in the theory of Siegel modular forms of genus 2, Trudy Mat. Inst. Steklov 112 (1971), 73–94

[A2] Andrianov, A.N., Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2, Uspekhi Math. Nauk 29 (1974), 43–110

[Ar] Arakawa, T., Vector valued Siegel's modular forms of degree two and the associated Andrianov L-functions, manuscripta math. 44 (1983), 155–185

[H] Hecke, E., Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung I, Math. Ann. 114 (1937), 1–28

[HC] Harish-Chandra, Automorphic Forms on Semisimple Lie Groups, Lect. Notes in Math. 62(1968), Springer, Berlin-Heidelberg-New York

[N1] Nakajima, S., On invariant differential operators on bounded symmetric domains of type 4, Proc. Japan Acad. 58, Ser. A(1982), 235-238

[N2] Nakajima, S., Invariant differential operators on $SO(2,q)/SO(2)SO(q)$ $(q \geqq 3)$, Master thesis, Univ. of Tokyo, 1981

[Ni] Niwa, S., On generalized Whittaker Functions on Siegel's upper half space of degree 2, Nagoya Math. J. 121 (1991), 171-184

[Sh] Shimura, G., On modular correspondence for $Sp(n, \mathbb{Z})$ and their congruence relations, Proc. Nat. Acad. U.S.A. 49(1963), 824-828

[Su1] Sugano, T., On holomorphic cusp forms on quaternion unitary groups of degree 2, J. of Fac. Scien. Univ. of Tokyo, Sec.1A 31, 3(1985), 521-568

[Su2] Sugano, T., On Dirichlet Series Attached to Holomorphic Cusp forms on $SO(2,q)$, Adv. Studies in Pure Math. 7 (1985), 333-362

[Su3] Sugano, T., On the L-functions associated with Hermitian Modular Forms of Genus 2, Bull. Fac. Educ. Mie Univ. 42 (Natur. Sci), 1–28, 1991

[Z] Zhuravlev, V. G., Euler products for Hilbert-Siegel modular forms of genus 2, Mat. Sb. 117 (1982), 449–468